

I Pompe à chaleur [ESIM 2001, PC Phys.2]

Une pompe à chaleur fonctionnant selon un cycle d'air est utilisée pour le chauffage d'une habitation. La machine comprend (figure ci-contre) :

- un compresseur **C** et une turbine **T** montés sur un même arbre entraîné par un moteur **M**,
- deux échangeurs **E** et **E'** permettant les transferts thermiques (à pression constante).

Le compresseur et la turbine sont calorifugés. L'air sera pris comme un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante $c_P = 1000 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

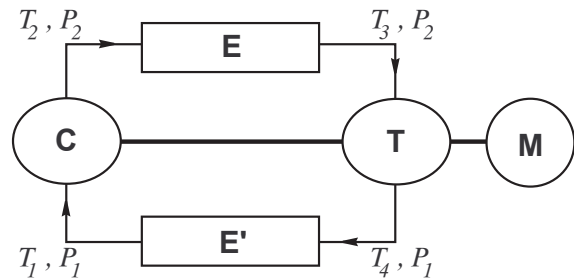
On donne les caractéristiques du cycle :
l'air sort de

E' à $T_1 = 280 \text{ K}$ et $P_1 = 1 \text{ bar}$

C à $T_2 = 375 \text{ K}$ et $P_2 = 2,78 \text{ bar}$

E à $T_3 = 325 \text{ K}$ et P_2

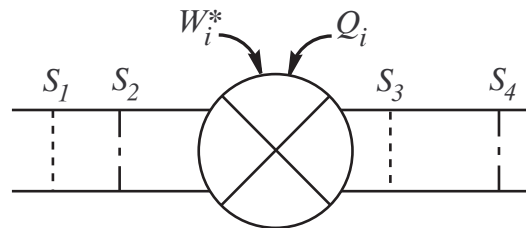
T à $T_4 = 243 \text{ K}$ et P_1 .



1) Soit un fluide en écoulement permanent (régime stationnaire) traversant un des quatre « sous-systèmes » (**E**, **E'**, **C** ou **T**).

On considère le système **ouvert** $\{\Gamma\}$ délimité par les surfaces planes S_2 et S_3 , ses parois sont indéformables.

En entrée (avant S_2), l'état du fluide est décrit par la pression P_e , la température T_e uniformes et constantes, son volume **massique** v_e et son énergie interne **massique** u_e .



De la même façon, en sortie (après S_3) il est décrit par P_s , T_s , v_s et u_s .

Les vitesses d'entrée et de sortie du fluide sont les mêmes et on néglige la variation d'énergie potentielle de pesanteur entre l'entrée et la sortie.

On délimite le système **fermé** $\{\Sigma\}$ associé au système ouvert précédent :

- à l'instant t , $\{\Sigma\}$ est constitué par le fluide contenu entre les plans S_1 et S_3 .
- à l'instant $t + dt$, $\{\Sigma\}$ est constitué par le fluide contenu entre les plans S_2 et S_4 .

On note dm la masse de fluide contenu entre S_1 et S_2 (entrant dans $\{\Gamma\}$ entre les instant t et $t + dt$).

M_Γ est la masse de fluide contenue dans $\{\Gamma\}$.

Enfin, W_i^* note le travail utile (autre que celui des forces de pression) reçu par le fluide et Q_i le transfert thermique reçu par le fluide entre les instants t et $t + dt$.

Les parois entre S_1, S_2 et entre S_3, S_4 sont calorifugées et indéformables.

1.a) Exprimer la variation d'énergie interne $U_\Sigma(t + dt) - U_\Sigma(t)$ de Σ entre les instants t et $t + dt$ en fonction de dm et des énergies interne massiques u_e et u_s .

1.b) Montrer que le premier principe, appliqué à $\{\Sigma\}$, exprimé en fonction des enthalpies massiques h_e , h_s (d'entrée et de sortie) et des données du problème, s'écrit :

$$\Delta H_{dm,e \rightarrow s} = dm(h_s - h_e) = W_i^* + Q_i$$

2) Identifier l'échangeur placé à l'intérieur de l'habitation et celui placé à l'extérieur : lequel est au contact de la source chaude et lequel est au contact de la source froide ?

Quel est le signe de Q_E , transfert thermique reçu par la masse dm d'air de la part de l'échangeur **E** ?

Quel est le signe de $Q_{E'}$, transfert thermique reçu par la masse dm d'air de la part de l'échangeur **E'** ?

3) Déterminer, en fonction des températures et de c_P , le travail utile *massique* :

3.a) w_C^* reçu par le gaz dans le compresseur. Donner sa valeur numérique.

3.b) w_T^* reçu par le gaz dans la turbine. Donner sa valeur numérique.

3.c) w^* fourni par le moteur. Donner sa valeur numérique.

Quel est l'intérêt de monter sur le même arbre le moteur, le compresseur et la turbine ?

4) Exprimer Q_E en fonction de dm , c_P , T_3 et T_2 .

5) Montrer que l'expression littérale de l'efficacité de la machine, en fonction des données du problème, peut se mettre sous la forme :

$$e_{th} = \frac{1}{1 + \frac{T_4 - T_1}{T_2 - T_3}}$$

6) Application numérique.

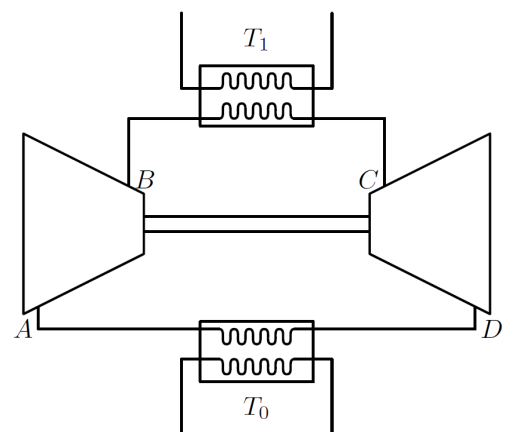
7) Le chauffage de l'habitation nécessite une puissance thermique $\mathcal{P}_{th} = \frac{|Q_E|}{dt} = 20 \text{ kW}$.

En déduire la valeur du débit massique d'air, à l'intérieur de la pompe, nécessaire pour avoir cette puissance thermique.

II Pompe à chaleur (2) [ENSTIM 2005]

Une pompe à chaleur effectue le cycle de Joule inversé suivant :

- L'air pris dans l'état A de température T_0 et de pression P_0 est comprimé suivant une **adiabatique** quasi statique (ou **réversible**) jusqu'au point B où il atteint la pression P_1 .
- Le gaz se **refroidit à pression constante** et atteint la température finale de la **source chaude**, T_1 , correspondant à l'état C .
- L'air est ensuite **refroidi** dans une turbine suivant une **détente adiabatique** quasi statique (ou **réversible**) pour atteindre l'état D de pression P_0 .
- Le gaz **se réchauffe** enfin à pression constante au contact de la **source froide** et retrouve son état initial A .



On considère l'air comme un gaz parfait de coefficient isentropique $\gamma = 1,4$.

On posera $\beta = 1 - \gamma^{-1}$ et $a = \frac{P_1}{P_0}$.

Pour les applications numériques, on prendra :

$$T_0 = 283 \text{ K } (10^\circ\text{C}) ; T_1 = 298 \text{ K } (25^\circ\text{C})$$

$$a = 5 ; R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \text{ (constante des gaz parfaits).}$$

1) Représenter le cycle parcouru par le fluide dans un diagramme de **Clapeyron**.

2) Exprimer les températures T_B et T_D en fonction de T_0 , T_1 , a et β .

Calculer leurs valeurs.

3) Définir l'efficacité e de la pompe à chaleur à partir des quantités d'énergie échangées au cours du cycle.

Montrer qu'elle s'exprime seulement en fonction de a et β .

Calculer sa valeur.

4) Quelles doivent être les transformations du fluide si on envisage de faire fonctionner la pompe à chaleur suivant un cycle de **Carnot** réversible entre les températures T_0 et T_1 ?

Établir l'expression de son efficacité e_r en fonction de T_0 et T_1 .

Calculer sa valeur.

5) Comparer les valeurs obtenues pour e et e_r .

Interpréter la différence observée.

6) Donner l'expression de l'entropie créée, $S_{i,m}$, pour une mole d'air mise en jeu dans le parcours

du cycle de **Joule** inversé, en fonction de $x = \frac{T_0 \cdot a^\beta}{T_1}$, R et β .

Étudier le signe de cette expression pour $x \geq 0$.

Calculer sa valeur.

7) La pompe à chaleur envisagée est utilisée pour chauffer une maison.

Sachant qu'en régime permanent les fuites thermiques s'élèvent à $\dot{Q}_f = 20 \text{ kW}$, calculer la puissance mécanique du couple compresseur-turbine qui permet de maintenir la maison à température constante.

Rq :

- Pour la question **1)** : L'énoncé voulait parler en réalité du « diagramme de **Watt** ».

- Pour la question **7)** : les fuites thermiques sont caractérisées par une **puissance** thermique – laquelle puissance est définie par un transfert thermique δQ_f (à définir correctement) fourni à l'extérieur pendant la durée dt d'un cycle élémentaire de la pompe à chaleur : $\mathcal{P}_f \equiv \dot{Q}_f \equiv \frac{\delta Q_f}{dt}$

Solution

I Pompe à chaleur [ESIM 2001, PC Phys.2]

1.a) Puisqu'on est en régime stationnaire, toutes les caractéristiques du système ouvert *fixe dans le référentiel d'étude* $\{\Gamma\}$ sont stationnaires ; entre autre : $U_\Gamma(t + dt) = U_\Gamma(t)$.

Alors : $U_\Sigma(t + dt) - U_\Sigma(t) = (U_\Gamma(t + dt) + dm u_s) - (U_\Gamma(t) + dm u_e)$, soit :

$$U_\Sigma(t + dt) - U_\Sigma(t) = dm (u_s - u_e)$$

1.b)

Le premier principe appliqué au système **fermé** $\{\Sigma\}$ entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\Delta U_\Sigma = W_i^* + Q_i + \underbrace{W_e + W_s}_{\text{travail de transvasement}}, \text{ avec :}$$

◦ $W_e \equiv$ travail de poussée : entre t et $t + dt$, les gaz en amont de S_1 poussent la masse dm de S_1 vers S_2 :

$$W_e = \int \delta^2 W = \int -P_{ext} dV = -P_e \int_{V_e}^0 dV = P_e V_e = dm P_e v_e$$

◦ $W_s \equiv$ travail détente : entre t et $t + dt$, les gaz en aval de S_3 aspirent la masse dm de S_3 vers S_4 :

$$W_s = \int \delta^2 W = \int -P_{ext} dV = -P_s \int_0^{V_s} dV = P_s V_s = dm P_s v_s$$

On a donc, d'après la question précédente :

$$\Delta U_\Sigma = U_\Sigma(t + dt) - U_\Sigma(t) = dm (u_s - u_e) = W_i^* + Q_i + dm (P_e v_e - P_s v_s),$$

soit, en faisant apparaître les enthalpies massiques d'entrée et de sortie ($h_i \equiv u_i + P_i v_i$) :

$$\Delta H_{dm,e \rightarrow s} = dm (h_s - h_e) = W_i^* + Q_i$$

2) Dans une pompe à chaleur, l'échangeur placé à l'intérieur de l'habitation doit en réalité fournir un transfert thermique à la pièce à chauffer, qui joue le rôle de source chaude (SC), alors que l'échangeur placé à l'extérieur doit réellement recevoir un transfert thermique de la part de l'extérieur, qui joue le rôle de source froide (SF).

Pour une pompe à chaleur, on doit donc avoir : $Q_{SF} > 0$ et $Q_{SC} < 0$.

Or, puisque $T_2 > T_3$, on a $Q_E < 0$, et $T_4 < T_1$ implique $Q_{E'} > 0$; donc :

La **source chaude** est jouée par l'intérieur de l'habitation qui est au contact de l'échangeur **E** ($Q_E < 0$)
et la **source froide**, extérieure à la maison, est au contact de l'échangeur **E'** ($Q_{E'} > 0$).

3.a)

En appliquant au compresseur calorifugé ($Q_C = 0$) le premier principe pour un système ouvert (établi en II.1.b), on trouve : $\Delta H_{dm,T_1 \rightarrow T_2} = W_C^*$.

De plus, le système étant un gaz parfait, on a : $\Delta H_{dm,T_1 \rightarrow T_2} = dm c_P (T_2 - T_1)$. Finalement :

$$w_C^* = \frac{W_C^*}{dm} = c_P (T_2 - T_1) \quad \longrightarrow \quad w_C^* = 95 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

3.b) Avec un raisonnement identique, on trouve :

$$w_T^* = \frac{W_T^*}{dm} = c_P (T_4 - T_3) \quad \longrightarrow \quad w_T^* = -82 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

3.c) • $W^* = dm w^* \equiv dm (w_C^* + w_T^*) = dm c_P (T_2 - T_1 + T_4 - T_3)$. Donc :

$$\boxed{w^* = c_P (T_2 - T_1 + T_4 - T_3)} \longrightarrow \boxed{w^* = 13 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

• Pour ce qui est du travail utile (autre que celui des forces de pression), le compresseur en consomme, alors que la turbine en produit. Le couplage de la turbine et du compresseur permet de récupérer le travail produit par la détente de l'air dans la turbine et de s'en servir pour faire fonctionner le compresseur.

On voit que l'apport est très important : 82 kJ.kg^{-1} sur 95 kJ.kg^{-1} .

4) La transformation subie par dm à la traversée de l'échangeur **E** étant isobare, on a :

$Q_E = Q_{E,P} = \Delta H_{dm,T_2 \rightarrow T_3} \equiv$ variation de l'enthalpie d'une masse dm de **gaz parfait** entre t et $t + dt = dm c_P (T_3 - T_2)$.

$$\boxed{Q_E = dm c_P (T_3 - T_2)}$$

5) Par définition de l'efficacité thermique d'une pompe à chaleur :

$$e_{th} = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur investie}} = \frac{|Q_E|}{W^*} = -\frac{Q_E}{W_C^* + W_T^*}.$$

Grâce aux questions précédentes, on a :

$$e_{th} = -\frac{dm c_P (T_3 - T_2)}{dm c_P (T_2 - T_1 + T_4 - T_3)} = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_3 + T_4 - T_1}$$

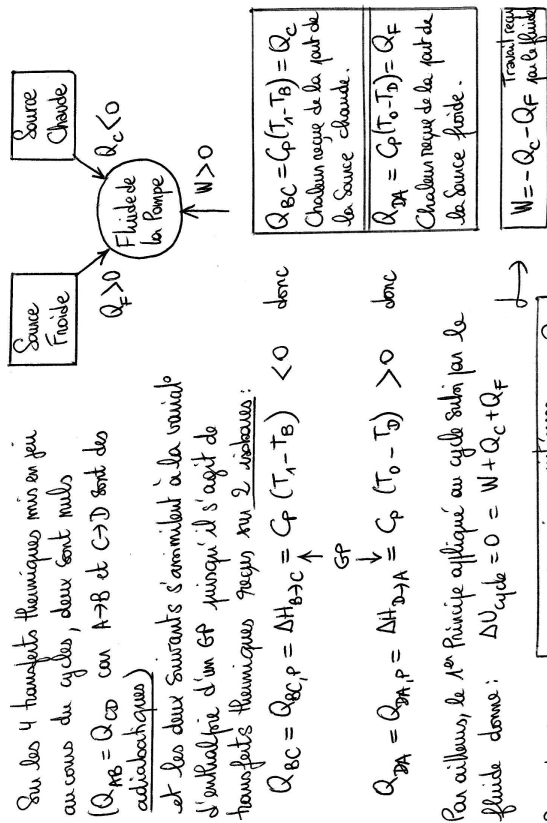
soit :
$$\boxed{e_{th} = \frac{1}{1 + \frac{T_4 - T_1}{T_2 - T_3}}}$$

6) Application numérique : $e_{th} = 3,85$

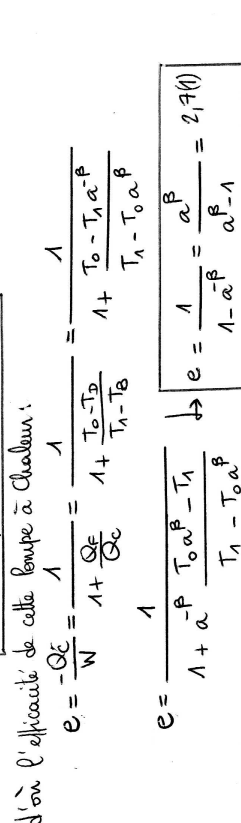
7) On a : $\mathcal{P}_{th} = \frac{|Q_E|}{dt} = -\frac{dm c_P (T_3 - T_2)}{dt} = D_m c_P (T_2 - T_3)$, d'où :

$$\boxed{D_m \equiv \frac{dm}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{th}}{c_P (T_2 - T_3)} = 0,4 \text{ kg.s}^{-1}}$$

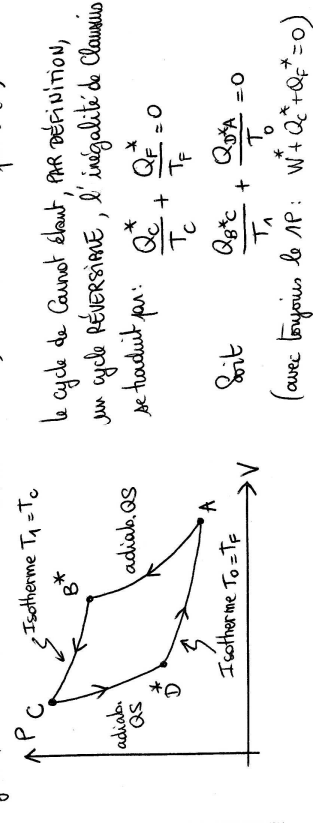
II Pompe à chaleur (2) [ENSTIM 2005]



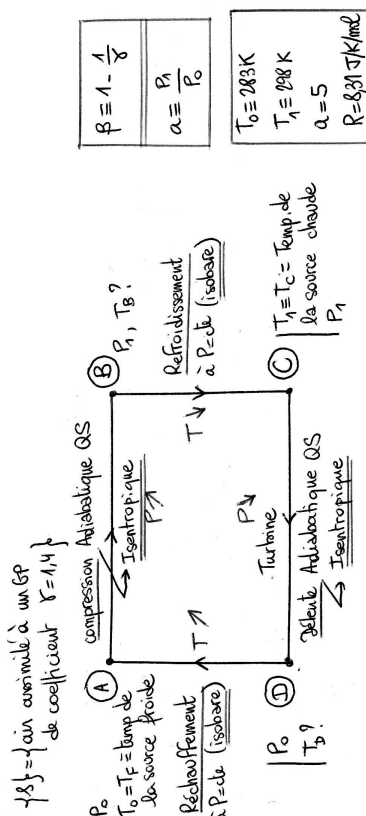
3)



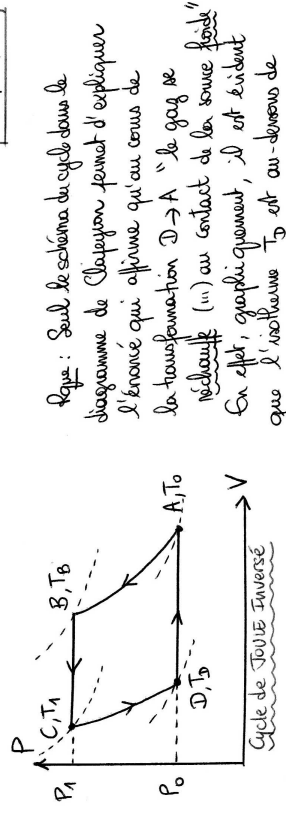
Cycle de Carnot entre la même source chaude (T_1) et la même source froide (T_0):



4



10



Il s'illuisme T_0 , donc $T_0 < T_0 = T_F$.
De même que $T_0 > T_1 \equiv T_C$.

$A \rightarrow B$ est une transformation adiabatique, QS et conserve un GP, donc on peut appliquer les lois de la place:

lois de l'usage: $\rightarrow$

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad P^{1-\frac{\gamma}{\gamma}} T = \text{cte} \quad P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = \text{cte} \quad P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = \text{cte}$$

$$V = \frac{nRT}{P}$$

soit $P^{-\beta} T = \text{cte}$ en introduisant le $\beta = 1 - \frac{1}{\gamma}$ de l'énoncé.

$$\text{finis } P_A T_A = P_B T_B \Leftrightarrow P_0^{-\beta} T_0 = P_1^{-\beta} T_B \text{ soit } T_B = \frac{P_1^{-\beta} T_0}{P_0^{-\beta}}$$
$$T_B = a^B T_0$$

$$AN: T_B = 448 \text{ K}$$

(on vérifie que $T_B > T_A$)

Même raisonnement pour $C \rightarrow D$: $P_C^{-\beta} T_C = P_D^{-\beta} T_D \Leftrightarrow P_1^{-\beta} T_1 = P_0^{-\beta} T_D$

$$T_D = a^{-\beta} T_1$$

d'où $eS_{BC} = C_p(1 - \frac{T_B}{T_1})$ De même $eS_{DA} = \frac{Q_{DA}}{T_0} = C_p(1 - \frac{T_0}{T_0})$

d'où $S_{i,m} \equiv eS = -C_{pm}(1 - \frac{T_0}{T_1}) - C_{pm}(1 - \frac{T_0}{T_1})$

$S_{i,m} \equiv \frac{\delta R}{\delta - 1}(-2 + \alpha + \frac{1}{\alpha}) = \frac{\delta R}{\delta - 1} f(\alpha)$ avec $\frac{dT}{dx} = 1 - \frac{1}{\alpha^2}$

Un simple tableau de variation montre que $f(\alpha) \geq 0$ ce qui permet de vérifier que $S_{i,m} \geq 0$ et $\alpha \geq 0$

Dans le cas particulier où $\alpha = 1$, on a $T_B = T_0$ et le cycle n'existe pas!

Dans le cas où $\alpha \neq 1$ et $\alpha > 0$, on a un cycle de Joule inversé quelconque et on vérifie qu'un tel cycle est un cycle IRREVERSIBLE!

Dans le cas étudié ici, $\alpha = \frac{\alpha^B T_0}{T_1} = \frac{T_B}{T_1} = 15$ et $S_{i,m} = 4,9 \text{ J.K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Pompe à Chaleur
SC = Source Chaude
MAISON
Tc = T1
Tc = T1

$Q_c < 0$
 $Q_f > 0$
 $W > 0$

• Pour qu'on soit en régime PERMANENT, il faut que $T_c = T_1 = T_0$

• Pour cela, il faut qu'on soit en cycle élémentaire δQ_c compense δQ_f : $\delta Q_f = -\delta Q_c$

• Par ailleurs on a établi que $e = -\frac{Q_c}{W} = -\frac{\delta Q_c}{\delta W}$ soit $\delta W = -\frac{\delta Q_c}{e}$

d'où la puissance mécanique du couple compresseur-turbine qui permet de maintenir la maison à température constante :

$P \equiv \frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{1}{e} \frac{\delta Q_c}{\delta t} = \frac{1}{e} \frac{\delta Q_f}{\delta t} = \frac{\dot{Q}_f}{e} = 7,4 \text{ kW}$ (7.37)

Soit $Q_F^* = Q_{DA}^* = -\frac{T_0}{T_1} Q_{BC}^* = -\frac{T_0}{T_1} Q_C^*$

L'efficacité correspondant à un tel cycle réversible est donc :

$e_{n,c} \equiv \frac{-Q_C^*}{W^*} = \frac{1}{-Q_C^* - Q_F^*} = \frac{1}{1 + \frac{Q_C^*}{Q_F^*}} = \frac{1}{1 - \frac{T_0}{T_1}}$

$e_{n,c} = 19,9$

5) Pour autant $e_{n,c} > e$

Ceci veut dire que le cycle de Carnot est réversible (aucune perte) alors que le cycle de Joule ne l'est pas (les transformations B→C et D→A sont irréversibles : le refroidissement et le réchauffement au contact des sources chaude et froide sont irréversibles)

6) Remarque : si moté dans cet énoncé l'entropie "réelle" (le "S" des cours!)... il ne s'agit donc pas d'une pseudo-entropie d'un état i mais bien la somme de production d'entropie pour une mole d'air au cours d'un cycle de Joule inversé.

Requie : en toute rigueur, il faudrait écrire $S_{i,m}$ et non pas S_i .

Pour 1 mol d'air j'arrivai à un GF ou $C_p = C_{pm} = \frac{\delta R}{\delta - 1}$

• Au cours d'un cycle, le 2ème principe s'écrit : $\Delta S_{cycle} = 0 = eS + eS$

d'où $S_{i,m} \equiv eS = -S_{cycle} = -S_{AB} - S_{BC} - S_{CD} - S_{DA}$

avec $eS_{AB} = eS_{CD} = 0$ car il s'agit d'adiabatiques.

$eS_{BC} \equiv$ entropie échangée au cours de la transformation B→C où le système est en contact, de manière isobare, avec le thermostat $T_c = T_1$

$eS_{DA} \equiv$ idem mais cette fois pour D→A en contact avec le thermostat $T_c = T_0$.

$eS_{BC} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T_c} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T_1} = \frac{\Delta H_{BC}}{T_1} = \frac{C_p(T_1 - T_0)}{T_1}$